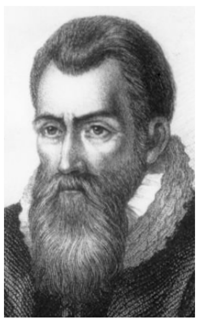
Chapitre 7 : Fonctions usuelles

Table des matières

Dans ce chapitre, nous décrivons le catalogue des fonctions usuelles, parmi lesquelles figure la fonction exponentielle. Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre $e = \exp(1)$ est le mathématicien suisse Leonhard Euler. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre parfois appelé constante de Neper en hommage à John Napier, mathématicien écossais et pionnier du logarithme.



John Napier
(1550-1617)

1 Logarithme népérien

Définition 1.1 (logarithme népérien)

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
Cette primitive est appelé logarithme népérien et est notée ln.

Conséquence : La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'où f est strictement croissante, positive sur $[1, +\infty[$ et négative sur $]0,1]$.

Proposition 1.2 (propriété de morphisme de ln)

$$\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Conséquence : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)\,; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\,; \quad \ln(x^n) = n\ln(x).$

Proposition 1.3 (limites sur le bord du domaine de ln)

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Remarque : Une autre limite à connaître est celle qui découle du nombre dérivé en 1 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

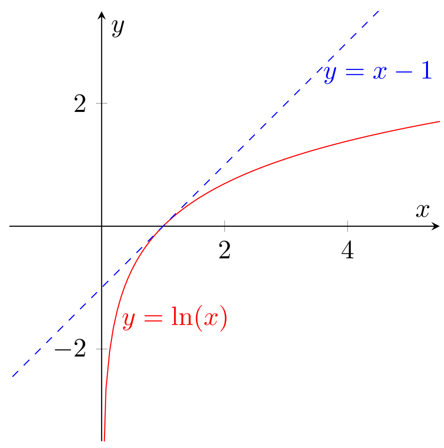
Proposition 1.4 (inégalité de concavité)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x) \leqslant x - 1$$

Conséquence : $\boxed{\forall x \in]-1;+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x}$.

Variations et représentation graphique :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2 Fonction exponentielle

Définition 2.1 (fonction exponentielle)

La fonction ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque est appelé la fonction exponentielle et est notée exp.

Conséquence : La fonction exp est strictement croissante et positive.

Proposition 2.2 (dérivabilité et dérivée de exp)

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Proposition 2.3 (propriété de morphisme de exp)

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \ \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Conséquence : $\forall x,y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\ ; \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}\ ; \quad (\exp(x))^n = \exp(nx).$

Définition 2.4 (nombre d'Euler)

Le réel $\mathbf{e} = \exp(1)$ est appelée nombre d'Euler (ou constante de Néper).

Notation : D'après la dernière égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \exp(1)^n = \mathbf{e}^n$.
On conviendra de noter pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}^x = \exp(x)$.

Proposition 2.5 (inégalité de convexité)

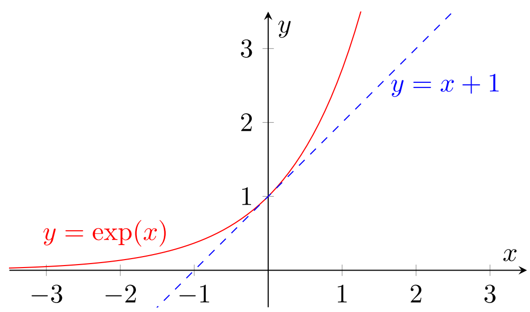
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant x+1$$

Proposition 2.6 (limites sur le bord du domaine de exp)

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Remarque : Une autre limite à connaître est celle qui découle du nombre dérivé en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$	0	$+$	1	$+$	$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



3 Fonctions puissances

Définition 3.1 (puissances avec un exposant réel)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\boxed{x^\alpha = \mathbf{e}^{\alpha \ln(x)}}$.
Lorsque $\alpha > 0$, on pose $0^\alpha = 0$.
Enfin, on pose $0^0 = 1$.

Remarque : Cette définition coïncide avec la définition usuelle des puissances lorsque α est un entier relatif. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ (unique $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $y^n = x$).

Définition 3.2 (fonction puissance)

On appelle fonction puissance une fonction du type $x \mapsto x^\alpha$, avec α un réel fixé.

Ensemble de définition :
- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{N}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
- Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si $\alpha \in \mathbb{R}_-^* \backslash \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

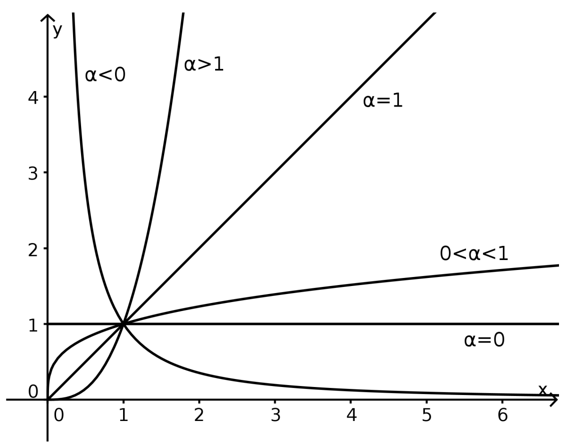
Étude sur $\mathbb{R}_+^*$:
La fonction $f : x \mapsto x^\alpha = \mathbf{e}^{\alpha \ln(x)}$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f' : x \mapsto \alpha\, x^{\alpha-1}$.

$\alpha > 0$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$+$	
x^α	‖ 0 ↗	1 ↗	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0	1	$+\infty$
$\alpha\, x^{\alpha-1}$	‖	$-$	
x^α	‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	0



Propriétés algébriques :
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$; $\quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$; $\quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Remarques :

1. Une fonction puissance $f : x \mapsto x^\alpha$ est continue sur son ensemble de définition.
2. Une fonction puissance $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition, **sauf dans le cas** $\alpha \in]\mathbf{0,1}[$ **où elle n'est pas dérivable en 0** (exemple : la fonction racine carrée pour $\alpha = \frac{1}{2}$).
   L'expression $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pour la dérivée reste valable en tout point x où f est dérivable.

Dérivées successives :
La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} : x \mapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\,.$$

4 Fonctions exponentielles

Définition 4.1 (fonction exponentielle de base a)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On appelle <u>fonction exponentielle de base a</u> la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a^x = \mathbf{e}^{x\ln(a)} \end{array}$$

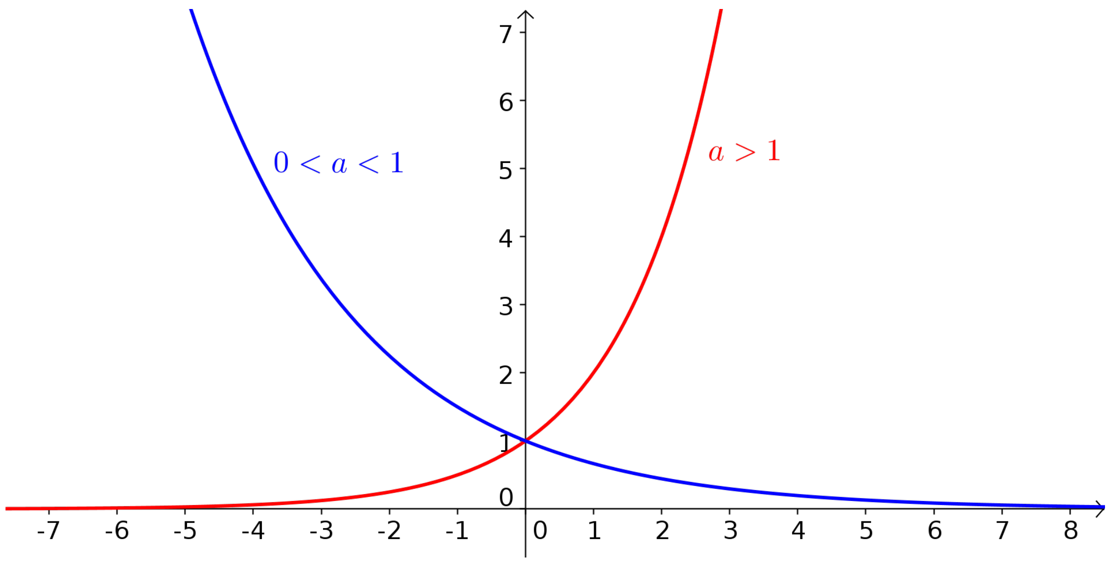
Étude :
La fonction $\exp_a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\exp_a' : x \mapsto \ln(a)\,a^x$.

<u>$a > 1$</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a)\,a^x$		$+$	
a^x	0 ↗	1	↗ $+\infty$

<u>$0 < a < 1$</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(a)\,a^x$		$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	1	↘ 0



Dérivées successives :
La fonction $\exp_a$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp_a^{(n)} : x \mapsto \ln(a)^n \exp_a(x)$.
Cas particulier : pour $a = \mathbf{e}$, la fonction exponentielle (de base $\mathbf{e}$) est infiniment dérivable et $\exp^{(n)} = \exp$.

5 Fonctions hyperboliques

Définition 5.1 (fonctions hyperboliques)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle :

1. cosinus hyperbolique de x le réel $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}$;
2. sinus hyperbolique de x le réel $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}$.

Proposition 5.2 (formule de trigonométrie hyperbolique)

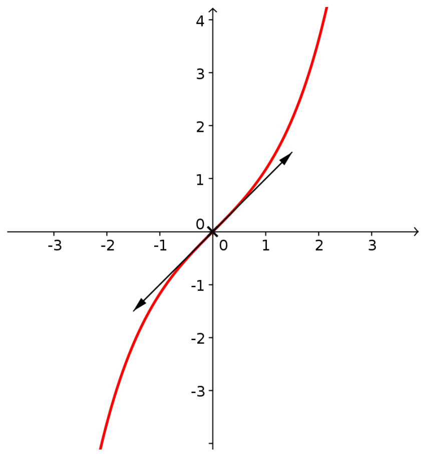
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathbf{e}^x \quad$ et $\quad \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathbf{e}^{-x}$

5.1 Sinus hyperbolique

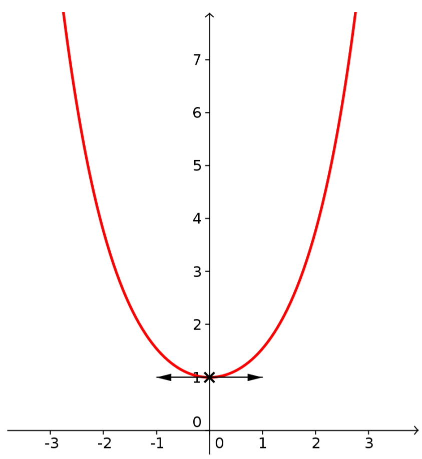
La fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire et strictement croissante.
Elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\boxed{\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}}$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

5.2 Cosinus hyperbolique

La fonction $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire et minorée (par 1).
Elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\boxed{\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}}$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$	$-$	0	$+$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

6 Fonctions logarithmes

Définition 6.1 (fonction logarithme de base a)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. La fonction $\exp_a$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: sa bijection réciproque est appelée fonction logarithme de base a, notée $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Conséquence de la définition : $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

Remarque : Pour $a = \mathbf{e}$, on retrouve le logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Les fonctions logarithmes les plus usitées sont le logarithme décimal ($\log_{10}$ noté parfois plus simplement $\log$) et le logarithme en base 2.

Exemple 6.2 : Calculer $\log(0{,}01)$, $\log_2(\frac{1}{16})$

Théorème 6.3 (expression à l'aide de la fonction ln :)

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Conséquence : Les propriétés algébriques sur le logarithme népérien sont donc vérifiées pour le logarithme dans n'importe quelle base.

Exemple 6.4 : Calculer $6\log(\sqrt{2}+1) + 2\log((\sqrt{2}-1)^3) + 3\log(4)$.

Étude :

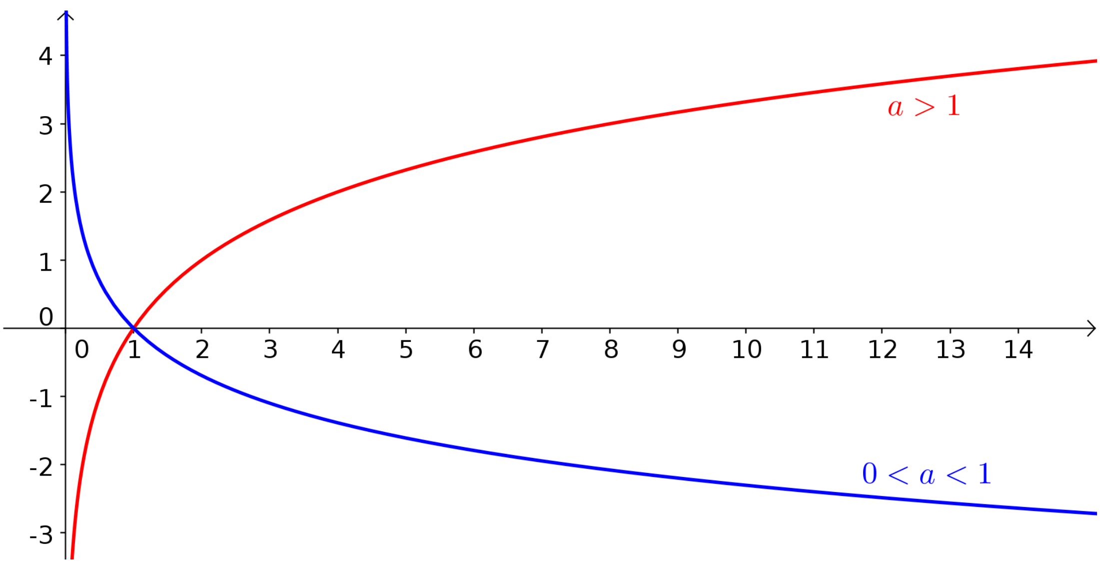
La fonction $\log_a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\log_a' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ \ln(a)}$.

$a > 1$

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x\ \ln(a)}$	$\|\|$		$+$		
$\log_a(x)$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$		$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x\ \ln(a)}$	$\|\|$		$-$		
$\log_a(x)$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$		$-\infty$



7 Croissances comparées

Théorème 7.1 (croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle)

Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

1. $\dfrac{x^\beta}{\ln(x)^\gamma} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{x^\beta}{|\ln(x)|^\gamma} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 0 \\ +\infty & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{|x|^\beta} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\ln(x)^\gamma} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

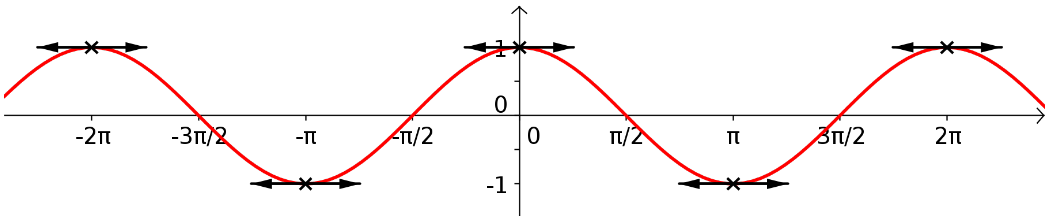
Philosophie à retenir (plutôt que l'énoncé précis du théorème) : En cas de forme indéterminée pour une limite, une fonction exponentielle l'emporte sur une fonction puissance ou un logarithme, et une fonction puissance l'emporte sur un logarithme.

Exemple 7.2 : Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x) + \frac{1}{x^3}$.

8 Fonctions circulaires

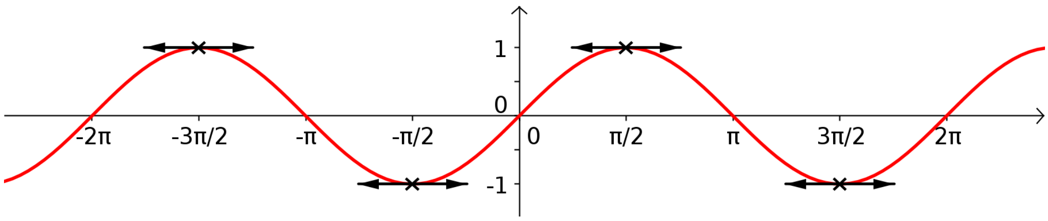
8.1 Cosinus

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, 2π-périodique et bornée (majorée par 1 et minorée par -1).
Elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\cos' = -\sin$.



8.2 Sinus

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, 2π-périodique et bornée (majorée par 1 et minorée par -1).
Elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $\sin' = \cos$.



Remarque : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, donc la courbe de sin s'obtient à partir de celle de cos par une translation de $+\frac{\pi}{2}$ le long de l'axe des abscisses.

Majoration : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|}$

Dérivées successives : Les fonctions cos et sin sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(n)} : x \mapsto \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

8.3 Tangente

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

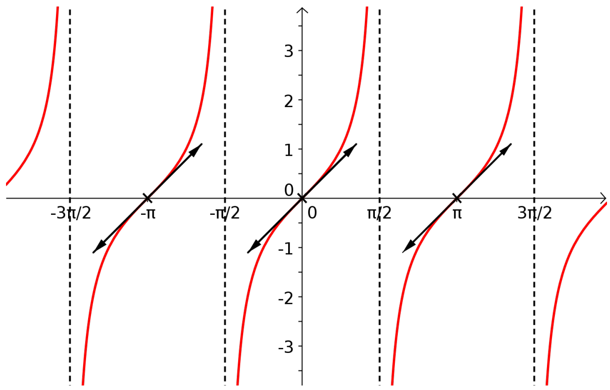
Elle est impaire et π-périodique.

Étude sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$:
La fonction tan est dérivable (donc continue) sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, et pour tout x dans cet intervalle :

$$\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

Tableau de variation sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2} + k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
$1+\tan^2(x)$	||	$+$	||
$\tan(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$ ||



9 Fonctions circulaires réciproques

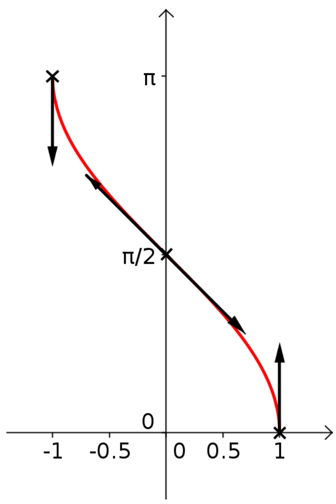
9.1 Arccosinus

Définition 9.1 (fonction arccosinus)

La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$: sa bijection réciproque est appelée <u>fonction arccosinus</u>, notée Arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$.

Par conséquent, pour tout $\boxed{\theta \in [0,\pi]}$ et $x \in [-1,1]$,

- $\cos(\theta) = x \Leftrightarrow \theta = \text{Arccos}(x)$;
- $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$;
- $\text{Arccos}(\cos(\theta)) = \theta$.



Étude :
La fonction Arccos est bornée (majorée par π, minorée par 0), continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$, et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Exemple 9.2 : Calculer $\text{Arccos}(-\frac{1}{2})$.

Résolution d'équations trigonométriques : si $x \in [-1,1]$:

$$\cos(\theta) = x \quad \Leftrightarrow \quad \theta \equiv \text{Arccos}(x)\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv -\text{Arccos}(x)\ [2\pi]$$

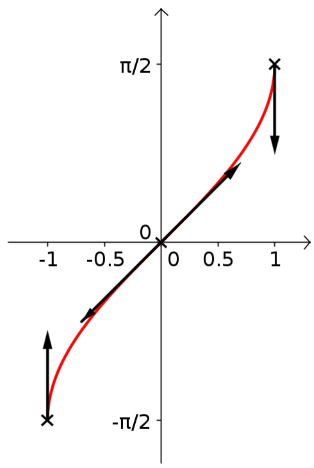
9.2 Arcsinus

Définition 9.3 (fonction arcsinus)

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$: sa bijection réciproque est appelée <u>fonction arcsinus</u>, notée $\text{Arcsin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent, pour tout $\boxed{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ et $x \in [-1,1]$,

- $\sin(\theta) = x \Leftrightarrow \theta = \text{Arcsin}(x)$;
- $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$;
- $\text{Arcsin}(\sin(\theta)) = \theta$.



Étude :
La fonction Arcsin est impaire, bornée (majorée par $\frac{\pi}{2}$, minorée par $-\frac{\pi}{2}$), continue et strictement croissante sur $[-1,1]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$, et

$$\boxed{\forall x \in\,]-1,1[\,,\ \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Remarque : On pourra utiliser la formule démontrée en TD : $\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 9.4 : Calculer $\text{Arcsin}(-\frac{1}{2})$.

Résolution d'équations trigonométriques : si $x \in [-1,1]$:

$$\sin(\theta) = x \quad \Leftrightarrow \quad \theta \equiv \text{Arcsin}(x)\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \pi - \text{Arcsin}(x)\ [2\pi]$$

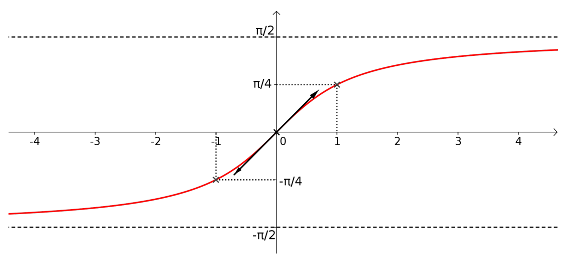
9.3 Arctangente

Définition 9.5 (fonction arctangente)

La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$: sa bijection réciproque est appelée <u>fonction arctangente</u>, notée $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent, pour tout $\boxed{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ et $x \in \mathbb{R}$,

- $\tan(\theta) = x \Leftrightarrow \theta = \text{Arctan}(x)$;
- $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$;
- $\text{Arctan}(\tan(\theta)) = \theta$.



Étude :
La fonction Arctan est impaire, bornée (majorée par $\frac{\pi}{2}$, minorée par $-\frac{\pi}{2}$), dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

Exemple 9.6 : Calculer $\text{Arctan}(\sqrt{3})$.

Résolution d'équations trigonométriques : si $x \in \mathbb{R}$: $\tan(\theta) = x \quad \Leftrightarrow \quad \theta \equiv \text{Arctan}(x)\ [\pi]$